Comprehensive Journal of Science
Volume (10), Issue (38), (Dec, 2025)
ISSN: 3014-6266

مجلة العلوم الشاملة
المجلد (10) ملحق العدد 38 ديسمبر 2025
ردمد: 3014-6266

الطرائق العددية التكرارية لحل معادلة كلاين-غولدن الخطية وغير الخطية ومقارنتها بطريقة التحويل التفاضلي الثنائي

امنه فتحي محمد احثيوش
كلية الاقتصاد والعلوم السياسي/صرمان
التخصص : رياضيات
Jwaheralaabed@gmail.com

أ. جواهر مختارعلي العابد
كلية الاقتصاد والعلوم السياسي/صرمان
التخصص : رياضيات
Amnafh1999@gmail.com

Received: 15-12-2025; Revised: 22-12-2025; Accepted: 2-1-2026; Published: 11-1-2026

الملخص:-

تناولنا في هذه الورقة البحثية معادلة (كلاين -غولدن) 485/7.الخطية و الغير خطية واستعرضنا طرق حلها المبنية على طريقة التحويل التفاضلي الثنائي و استخدامها لحل بعض النماذج الهامة من المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية و غير الخطية لحلها بطريقة بسيطة و تحصلنا على الحل الفعلي للمسائل المدروسة ، و قمنا بإجراء مقارنة باستخدام طرق عددية تكرارية مثل (VIM , DTM) تستخدم لحل معادلة كلاين-غولدن و طريقة التحويل التفاضلي الثنائي(ADM)، ثم قارناها مع الحل الفعلي من خلال الأمثلة المدروسة واستنتجنا قيمة الخطأ والدقة التي تعطيها كل طريقة ، في جميع الحالات حصلنا على نتائج دقيقة و فعالة أثبتت دقة وفعالية هذه الطرائق باستخدام لغة البرمجة (Mathematicla8) .

المقدمة:-

معادلة كلاين-غولدن هي معادلة تفاضلية جزئية خطية ، تستخدم لوصف حركة الجسيمات في الفيزياء، ثم تقديمها أول مرة من قبل كلاين وغولدن في عام 1926، وهي معادلة مشتقة من صيغة الطاقة النسبية وتظهر في الفيزياء النسبية ، أيضاً تستخدم لوصف ظاهرة تشتت الموجة ، ونجدها في البصريات غير الخطية وفيزياء البلازما ، وتعرف معادلة كلاين- غولدن كالتالي :-

$$u_{tt} - u_{xx} + b_1 u + g(u) = f(x,t) \qquad (1)$$

حيث(u)هي الدالة الموجية ، و(t) هو الزمن ، و(x) تمثل المكان ،(m) تمثل الكتلة ، (g) دالة غير خطية ،.f دالة تحليلية معرفة ، والشروط الابتدائية لهذه المعادلة هي :

$$u(x,0) = f(x)\ , \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x). \tag{2}$$

معادلة كلاين –غولدن لها أهمية كبيرة وتطبيقات واسعة ومتنوعة نذكر بعض منها [4] :–

1– فيزياء الجسيمات :– تستخدم لوصف حركة الجسيمات ذات الكتلة مثل الالكترونات والبروتونات.

2– فيزياء النووية :– تستخدم لوصف حركة النيوكليونات داخل النواة .

3– ميكانيكا الكم :– تستخدم لوصف سلوك الجسيمات في الأنظمة الكمومية .

هناك العديد من الطرق العددية التكرارية لحل معادلة كلاين–غولدن ،التي تقدم حل سريع ودقيق وسنذكر بعض منها:–

1– طريقة غاوس– سايدل (Gauss–Seidel Method) .

2– طريقة الاسترخاء المتتالي (Successive over – Relaxation – SOR) .

3– طريقة (Variational Iteration Method, VIM).

4– طريقة (Differential Transform Method . DTM) .

5– طريقة جاكوبي (Jacobi Method) .

6– طريقة التدرج المترافق (Conjugate Gradient Method) .

وسوف نقوم بعرض الحلول التحليلية التقريبية عبر طريقة التحويل التفاضلي الثنائي [11–13] لمعادلة كلاين– غولدن وهي تختلف عن طريقة سلسلة تايلور التقليدية .أى أن طريقة سلسلة تايلور تستغرق وقتاً حسابياً للأوامر الكبيرة , و باستخدام هذه الطريقة , من الممكن الحصول علي نتائج دقيقة للغاية للمعادلات التفاضلية [16–20]و [25] تم تطوير هذه الطريقة و حصو ل على حلول لحل مشاكل المعادلات الخطية و الغير الخطية .

نموذج معادلات تفاضلية جزئية خطية و غير خطية [3] .

كل من المعادلات التفاضلية العادية والجزئية يمكن أن تصنف إلى خطية وغير خطية. وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين:

1. إذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط أو ثوابت.
2. إذا كان المتغير التابع والمشتقات غير مرفوعة لأسس، أي كلها من الدرجة الأولى

وتكون غير خطية فيما عدا ذلك.

طريقة التحويل التفاضلي الثنائي .

الفكرة الأساسية لتحويل التفاضلي الثنائي يتم تعريف العمليات الأساسية[17−22]علي النحو التالي :

بفرض أن الدالة W لديها متغيرين (w,x, y) وتكون تحليله في النطاق k حيث$(x_0, y_0) = (x, y)$ في هذا النطاق .

يمكن كتابة الدالة w (x, y) بسلسلة واحدة يقع مركزها في النقطة (x_0, y_0) ويكون التحويل التفاضلي للدالة (x, y) التي علي شكل التالي :−

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[.\frac{\partial^{k+h} w(x,y)}{\partial x^k\,\partial y^h}\right]_{(x_0,y_0)} \qquad (3)$$

حيث $\mathbf{w}(x, y)$هي الدالة لأصلية , $\mathbf{w}\ (\mathbf{k}, \mathbf{h})$هي التحويل التفاضلي العكس لدالة(W (K ,hعلي النحو التالي :−

$$\mathbf{w(x,y)} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty}\sum_{\mathbf{h=0}}^{\infty} \mathbf{w(k,h)(x - x_0)^k\,(y\ \ - y_0)^h}. \qquad (\mathbf{4})$$

حقيقة هذا التطبيق انه عندما يتم أخذ النقطة (x_0, y_0)علي أنها (0,0) يتم التعبير عن الدالة .

$\mathbf{w(x, y)}$ سلسلة محدودة من المعادلة (4) نستطيع كتابتها علي صورة :−

$$\mathbf{w(x.y)} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty}\sum_{\mathbf{h=0}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k!\,h!}}\left[\left[\frac{\boldsymbol{\partial}^{\mathbf{k+h}}\mathbf{w(x,y)}}{\boldsymbol{\partial}\mathbf{x^k}\boldsymbol{\partial}\mathbf{y^h}}\right]_{(\mathbf{0,0})}\right]\mathbf{x^k y^h} \qquad (\mathbf{5})$$

يتم سرد العمليات الحسابية التي يتم إجراؤها بوسطه طريقة التحويل التفاضلي الثنائي في الجدول (1).

جدول (1)

الدالة الأصلية	التحويل التفاضلي الثنائي لدالة الأصلية
$w(x,y) = u(x,y) \pm v(x,y)$	$w(k) = U(k,h) \pm V(k,h)$
$w(x,y) = \propto u(x,y)$	$w(k,h) = \propto U(k,h), \propto$ is consant
$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$	$w(k,h) = (k+1)U(k+1,h)$
$w\ (x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$	$w(k,h) = (h+1)U(k,h+1)$
$w(x,y) = u(x,y)v(x,y)$	$w(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s)$

$w(x,y) = x^m y^n$	$w(k,h) = \delta(k-m,h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n)$
$w(x,y) = \frac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r\,\partial y^s}$	Where $\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m.\\0, & k\neq m.\end{cases}$ $\delta(h-n)=\begin{cases}1, & h=n.\\0, & h\neq n.\end{cases}$ $w(k,h) = (k+1)(k+2)\ldots(k+r)(h+2)\ldots(h+s)U(k+r,h+s)$

من خلال الأمثلة التالية سوف نقوم بتوضيح فعالية هذه الطريقة .

مثال (1):

لتكن لدينا معادلة كلاين –غولدن [4]

$$u_{tt} - u_{xx} = u \tag{6}$$

بشروط ابتدائية هي :

$$u(x,0) = 1+\sin x \ , \ u_t(x,0) = 0 \tag{7}$$

عند استخدام التحويل التفاضلي الثنائي للمعادلة (6) ينتج أن :

$$(h+1)(h+2)\,u(k,h2)-(k+1)(k+2)u(k+2,h) = u(k,h) \tag{8}$$

باستخدام الشروط الابتدائية لهذا التحويل علي صورة

$$U(k,0) = \begin{cases} 1 \quad , & k=0 \\ \frac{1}{k}\,, & k=1,5,\ldots \\ -\frac{1}{k} \quad , & k=3,7,\ldots \\ 0 \ , & k=2,4,6,\ldots \end{cases} \tag{9}$$

$$U(k,1) = 0 \tag{10}$$

بالتعويض في (9 ، 10) في (8) علي التوالي نحصل علي الحل

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} u(k,h)x^k t^h$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots) + (1+\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots) = \sin x + \cosh t \tag{11}$$

فيكون الحل الـ (6) و (7).

مثال (2):-

يفرض أن لدينا معادلة كلاين -غولدن الخطية الغير متجانسة [3]

$$u_{tt} - u_{xx} - 2u = -2\sin x \sin t \qquad (12)$$

بشرط ابتدائي التالي :-

$$u(x,0) = 0 \,, u_t(x,0) = \sin x \qquad (13)$$

يكون التحويل التفاضلي للمعادلة (12) علي الشكل التالي :

$$(h+1)\,(h+1)\,U\,(k,h+2) - (k+1)(k+2)U(k+2,h) - 2U(k,h) =$$
$$=2\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}\,\frac{\sin\left(\frac{h\pi}{2}\right)}{h!} \qquad (14)$$

والحل لهذا التحويل يكون :

$$U(k,0)=0 \qquad (15)$$

$$U(k,1)=\begin{cases} 0, k = 0,2,4, \ldots\ldots \\ \frac{1}{k!}, k = 1,5 \ldots\ldots \\ -\frac{1}{k!}\ , k = 3,7 \ldots\ldots \end{cases} \qquad (16)$$

وبالتعويض ب (15) – (16) في المعادلة (14) نحصل علي

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{h=0}^{\infty}\ U\,(k,h)\,x^k t^h = \left(x- \frac{x3}{3!}+\frac{x5}{5!}+\cdots\right)$$
$$\left(t-\frac{t3}{3!}+\frac{t5}{5!}+\cdots\right) = \sin x \sin t \qquad (17)$$

وبهذا يكون الحل للمعادلات(12) و(13) .

مثال (3)

نفرض إن لدينا معادلة كلاين -غولدن الغير خطية و الغير متجانسة التالية :

$$U_{tt}- U_{xx+} U^2 = 6xt\,(x^2 - t^2)+ x^6\ \ t^6 \qquad (18)$$

وبشروط ابتدائية

$$U(x,0)= 0 \ \ , U_t\,(x,0) = 0 \qquad (19)$$

ويكون التحويل التفاضلي للمعادلة (18) هو

$$(h+1)(h+2)U(k,h+2)-(k+1)(k+2)U(k+2,h) + \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)U(k-r,s) = 6\delta(k-3,h-1) - 6\delta(k-1,h-3) + \delta(k-6,h-6) \qquad (20)$$

والشروط الابتدائية المحولة هي :

$U(k,0)=0$ (21)

$U(k,1)=0$

(22)

يمكن الحصول علي الحل الدقيق للمعادلات (21) , (22) علي التوالي من (20) كم يلي :

$$U((x,t))=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k t^h = x^3 t^3 \qquad (23)$$

وبالتالي يتم الوصول للحل الدقيق لـ [16] :

$$u((x,t)) = x^3 t^3 \qquad (24)$$

مثال(4).

بفرض ان لدينا معادلة كلاين –غولدن الغير خطية والغير متجانسة التالية:

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -x\cos t + x^2\cos^2 t. \qquad (25)$$

بحيث تكون الشروط الابتدائية :

$$u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0 \qquad (26)$$

التحويل التفاضلي للمعادلة (25) يكون:

$$(h+1)(h+2)U(k,h+2)-(k+1)(k+2,h) + \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)U(k-r,s) = \frac{1}{2}\delta(k-2,h)\frac{\cos(\frac{h\pi}{2})}{h!} + \frac{1}{2}\delta(k-2,h). \qquad (27)$$

والتحويل التفاضلي لشروط الابتدائية يكون

$$U(k,0)=\begin{cases}1 \ , & k=1\\ 0, & \text{خلاف ذلك}\end{cases} \quad (28)$$

$$U(k,1)=0. \qquad (29)$$

مثال(5):

بفرض إن لدينا معادلة كلاين غوردون الغير خطية[4].

$$u_{tt}-u_{xx}+u^2=0 \qquad (32)$$

بشرط ابتدائي:

$$u(x,0)=1+\sin x\ , \qquad u_t(x,0)=0 \qquad (33)$$

حيث تكون الشروط الابتدائية المحولة علي النحو التالي:

$$U(k,0)=\begin{cases}1 & , \ k=0\\ \frac{1}{k} & , \ k=1,5\\ -\frac{1}{k} & , \ k=3,7\\ 0 \ , & k=2,4,6\ldots\end{cases} \qquad (35)$$

$$U(k,1)=0 \qquad (36)$$

بالتعويض على التوالي بالصيغ في (35) و(36) في (34) نحصل على

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k t^h=1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)+$$
$$\frac{t^2}{2!}\left(-1-3x-x^2+\frac{3x^3}{3!}+\frac{x^4}{3}-\frac{3x^5}{5!}-\frac{2x^6}{45}+\cdots\right)+$$
$$\frac{t^4}{4!}\left(11x+12x^2-\frac{11x^3}{3!}-4x^4+\cdots\right)+\cdots$$

ومن الواضح إن هذا التقريب في شكل سلسلة .

مثال(6).

نفرض ان لدينا معادلة معادلة كلاين –غولدن التالية:

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{\pi^2}{4}u + u^2 = x^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \qquad (37)$$

بحيث تخضع لشرط ابتدائي التالي:

$$u(x,0) = 0\,, u_t(x,0) = \frac{\pi}{2}x\,. \qquad (38)$$

نقوم بإجراء التحويل التفاضلي للمعادلة (37) وتكون كالتالي

$$(h+1)(h+2)U(k,h+2) - (k+1)(k+2)U(k+2,h)+$$

$$\frac{\pi^2}{4}(k,h) + \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)U(k-r,s).$$

$$= \frac{1}{2}\delta(k-2,h) - \frac{1}{2}\delta(k-2,h).2^h\left(\frac{\cos(h\frac{\pi}{2}}{h!}\right) \qquad (39)$$

وأيضا نجري التحويل لشرط الابتدائي كالتالي:

$$U(k,0) = 0 \qquad (40)$$

$$U(k,1) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k = 1. \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases} \qquad (41)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k t^h =$$

$$x\left[\frac{\pi}{2}t - \frac{(\frac{\pi}{2}t)^3}{3!} + \frac{(\frac{\pi}{2}t)^5}{5!} - \cdots\right] = x\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

وهذا يكون الحل الدقيق للمعادلتين (37),(38).

مقارنة بين قيم الحل لمعادلة كلاين– غولدن و **ADM,VIM [18]** وطريقة التحويل التفاضلي **(DTM)** للمتغيرين **(x,t)**

جدول (2)

t=0.1 x	Exact value	ADM	VIM	DTM	Erro rADM	Error VIM	Erro rDTM
0.0	.9949999660	0.994999986	0.995000024	0.995000000	0.0000002	0.00000005	0.000000034
0.1	1.093291101	1.093291132	1.093291179	1.093336821	0.00000003	0.00000007	0.0000572
0.2	1.190502981	1.190502983	1.190503087	1.190602734	0.00000002	0.00000002	0.00000002
0.3	1.286686101	1.28668610	1.285668848	1.285829872	0.00000005	0.00000005	0.00000001
0.4	1.377844000	1.377844211	1.377844710	1.378073322	0.00000011	0.00000011	0.00000011
0.5	1.466118311	1.466118315	1.466119219	1.466420573	0.00000001	0.00000001	0.00000001
0.6	1.549620130	1.549620480	1.549621939	1.550000812	0.00000008	0.00000008	0.00000002
0.7	1.627529344	1.627529538	1.627531694	1.627994045	0.00000005	0.00000005	0.00000004
0.8	1.699081260	1.699081273	1.699084244	1.699640074	0.00000013	0.00000013	0.00000013
0.9	1.763575472	1.763575490	1.763579356	1.764245622	0.00000002	0.00000002	0.00000001
1.0	1.820382411	1.820382425	1.820382216	1.821201388	0.00000002	0.00000002	0.00000007

جدول (3)

t=0.2 x	Exact value	ADM	VIM	DTM	Error ADM	Error VIM	Error DTM
0.0	.9949999110	0.979999116	0.980001577	0.980000000	0.0000003	0.00000003	0.00000005
0.1	1.093291112	1.073723730	1.073726319	1.073725261	0.00000002	0.0000572	0.00000007
0.2	1.190502981	1.166134875	1.166138050	1.166138050	0.00000003	0.00000002	0.00000002
0.3	1.28668600	1.256326130	1.256331032	1.256328927	0.00000005	0.00000001	0.00000005
0.4	1.377844210	1.343423788	1.343432104	1.343427256	0.00000011	0.00000011	0.00000011
0.5	1.466118315	1.426594492	1.426608263	1.426598958	0.00000001	0.00000001	0.00000001
0.6	1.549620460	1.505052082	1.505073495	1.505058688	0.00000008	0.00000002	0.00000008

0.7	1.627529530	1.578063673	1.578094808	1.578075355	0.00000005	0.00000004	0.00000005
0.8	1.699081273	1.644954933	1.644997540	1.644678005	0.00000013	0.00000013	0.00000013
0.9	1.703575490	1.705144628	1.705169916	1.705161053	0.00000002	0.00000001	0.00000002
1.0	1.820382421	1.757998450	1.758066925	1.758088889	0.00000002	0.00000007	0.00000002

جدول (4)

t=0.3 x	Exact value	ADM	VIM	DTM	Error ADM	Error VIM	Err or DT M
0.0	.9949999000	0.959499001	0.955017653	0.955000000	0.0002866	0.00000005	0.00000003
0.1	1.093291111	1.041345652	1.041325485	1.041318399	0.0002895	0.00000007	0.0000572
0.2	1.190502912	1.125945576	1.125974851	1.125970235	0.0002924	0.00000002	0.00000002
0.3	1.286686102	1.208114007	1.208147932	1.208145667	0.0002954	0.00000005	0.00000001
0.4	1.377844222	1.287943874	1.287088824	1.287081794	0.0002983	0.00000011	0.00000011
0.5	1.466118312	1.362025218	1.362089477	1.362067708	0.0003136	0.00000001	0.00000001
0.6	1.549620410	1.432404521	1.432497282	1.432448098	0.0003168	0.00000008	0.00000002
0.7	1.627529532	1.497587424	1.497717706	1.497625423	0.0003200	0.00000005	0.00000004
0.8	1.699081270	1.557040327	1.557215916	1.557060645	0.0003232	0.00000013	0.00000013
0.9	1.763575480	1.610291023	1.610517519	1.610272513	0.0003264	0.00000002	0.00000001
1.0	1.820382422	1.656928567	1.657208637	1.656835416	0.0003297	0.00000002	0.00000007

يمثل جدول (2) وجدول (3) وجدول (4) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمعادلة كلاين –قولدن والتفاضل المختزل الثنائي والحصول علي تكرارات عددية ،كما موضح العمود الأول من اليسار يمثل قيم x والعمود الثاني القيم الفعلية والعمود الثالث لـ ADM والعمود الرابع VIM والعمود الخامس يمثل DTM والأعمدة السادس والسابع والثامن تعطي الخطاء المطلق نسبة إلي القيم الفعلية ،ونلاحظ دقة طريقة التحويل التفاضلي في هذه الأمثلة من خلال النتائج العددية التي نراها في الجداول (**2**،**43**).

الخلاصة:-

في هذا الورقة البحثية تم توضيح طريقة التحويل التفاضلي لحل معادلة كلاين -غولدن الخطية والغير خطية وأكدت الدراسة الحالية أن طريقة التحويل التفاضلي ثنائي قدم مزايا كبيرة ،وسهل علينا الحل ،من حيث قابليتها لتطبيق المباشر ، وفاعليتها الحسابية ودقتها من خلال الأمثلة المدروسة. ويمكننا أن نصل إلى حلول دقيقة وتقريبية للمعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية. فهي قادرة على تقليل حجم العمل مقارنة بالطرق الكلاسيكية مع الحفاظ على الدقة العالية التي تقدمها الطرق العددية التكرارية وقد يفتح الباب أمام تطبيقات أوسع . (النتاج السابقة تحصلنا عليها من خلال استخدام برنامج (Mathematicla 8))

التوصيات :

نوصي الباحثون والمهندسون باستخدام طرق أخري ولغات برمجة مختلفة، لحل معادلة كلاين -قولدن ودراسة تطبيقاتها بالاخص نظرية المجال الكمومي لفهم دورها في وصف الجسيمات الأساسية والتفاعلات الفزيائية، ومقارنة النتائج للوصول إلي حلول حسابية قادرة على تقليل العمل وإكمال الطريق في مجالات العلوم المختلفة .

المراجع

[1]- P.J. Caudrey. I.C . Eilbeck.J.D.Gibbon. The sine-Gordon as a modleclassicl field theory, ll, NuovoCimento 25 (1975) 497-511.

[2]- O.Abdel-Halim Hassan, Different applications for thedifferential transformtion in the partial differentialequation , Apppl, Math, Comput. 129(2002) 183-201.

[3]- F. Ayaz, On two- dimensional differential transformmethod , Appl, Math. Comput, 1439(2003) ,361-374.

[4]-F.Ayaz,solution of differential equation bydifferential transform method , Appl, Math. Comput, 147(2004)547-567.

[5]- A. Kurnaz, G, Oturnaz, M.E. Kiris, n-Dimensional differential transform method for solving linear and nonlinear PDEs Int.J.comput.Math,82 (2005).369-380.

[6]-O.Adbel-Halim Hassan, Comparisondifferential transform technique with Adomian deComparistion method for linear and nonlinear initial value problems,Chaos, solitons and fractals 36 (2008) 53-65.

[7]- O. FigenKangalgil, O.fatmaAyaz , Solitary Wave soluation for Kdv and mkdv equations bydifferential transform method ,Chaos ,solitons and Fractals, doi: 10.1016/j.chaos.2008.02.009.

[8]- A.M.Waswas.The modified deComparistion method for analytic treatment ofdifferentialequations Appl. Math comput. 173(2006) 165-176.

[9] Polyanin, A. D. and Zaitsev, V. F., Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations , Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.

[10] WAZWAZ , A. M.2009- Partial Differential Equations andSolitary Waves Theory . Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Heidelberg , USA , 761p .

[11] ABASSY ,T 2012 - Modified variational iteration method (non-homogeneous initial value problem) .Mathematical andComputer Modelling . Vol .55, 1222-1232p .

[12]- R.K. Dodd, I.C. Eilbeck ,J.D. Gibbon, H.C, Morris, Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic press, London, 1982.

[13] ABDELRAZEC , A.H.M . 2008 - AdomianDecompositionMethod : Convergence Analysis and Numerical

[14] HOLMQUIST , S.M . 2007 - An Examination of theEffectiveness of the Adomian Decomposition Method inFluid Dynamic Applications . University of Central Florida , USA , 158p.

[15] RADHIKA ,T.S.L . , LYENGAR , T. K .V . & RAJA RANI . T. 2015- Approximate Analytical Methods for SolvingOrdinary Differential Equations. CRC Press Taylor & Francis Group , USA , 200p .

[16] IRANDOUST-PAKCHIN, S. and AHMADIAN, D., (2015). "Homotopy Analysis Method For Computing Eigenvalues Of Sturm-Liouville Problems", International Journal Of Nonlinear Science 19(2):100-.601

[17] ZADEH JAFARI, H, and KARIMI , M., (2010)." Homotopy Analysis Method For Solving Integral And Integro Differential Equations", IJRRAS 2(2): 140-144

[18]- E.Y. Deeba, S.A. Khuri, A decomposition method for solving the nonlinear Klein-gordonequation,J. comput .124(1996)442-448.

[19]- S. El-sayed, the decomposition method for studying the Klein-Gordon equation, Chaos, solitons and Fracals 18 (2003) 1025-1030.

[20]- D. Kaya,S.M. El-Sayed, A numerical solution of the Klein-Gordon equation and convergence of the decomposition method , Applied Mathematics and computation 156 (2004)341-353.

[21]- M.S.H. Chowdhury, I. Hashim, Application of homotopy-perturbation method to the Klein-Gordon equation and sine-Gordon equation, Chaos, solitons and Fracals doi:10. 1016/j.

[22]- J.k Zhou, Differential transform and its, Appliecations for ElectricalCircuits,Huazhong University press, Wuhan, China,1986.

[23]- C.K Chen, S.H. Ho, solving partial differential equations by two-dimensional differential transformmethod ,Appl, Math,comput.106 (1999)171-179.

[24]- M.J. Jang, C.L chen, Y.C, Liu,by two- dimensional differentialtransform for partialdifferentialequation , Apppl, Math, Comput. 121(2001) 261-270.

[25] Approximations . McMaster University , Canada , 58p

Chaos.2007.06.091.